

תרגיל 5 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. חשב את האינטגרל הבא עבור $a \in \mathbb{C}$ המקיים $|a| < 1$

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$$

2. בתרגיל הזה נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

נגדיר: $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = t$ ו- $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2(t) = Re^{it}$.
נסמן ב- γ את ההרכבה של המסילות γ_1, γ_2 .

(א) חשב את $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ כאשר $R \rightarrow \infty$. (רמז: השתמש בנוסחת

האינדקס)

(ב) הוכח כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0$

(ג) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

3. בתרגיל הזה נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$ עבור $0 < a \in \mathbb{R}$

נגדיר: $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = t$ ו- $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2(t) = Re^{it}$.
נסמן ב- γ את ההרכבה של המסילות γ_1, γ_2 .

(א) הוכח כי $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \frac{e^{-a}}{2ia} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-ia}$. (רמז: הראו תחילה כי

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \frac{1}{2ia} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z-ia} dz$$

(ב) חשב את $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz$ כאשר $R \rightarrow \infty$. (השתמשו בסעיף א')

(ג) הוכח כי $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 0$

(ד) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$

4. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ עבור $a > b > 0$